INSA DE TOULOUSE - DEPARTEMENT DE STPI 1ÈRE ANNEE

CONTROLE CONTINU ELECTROSTATIQUE. Durée 2 heures

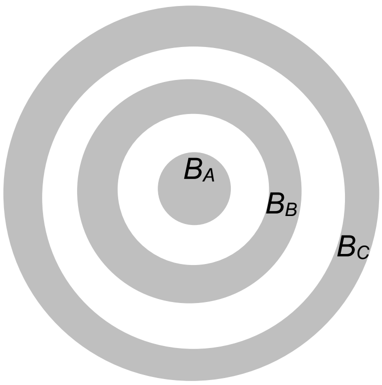
Données : Expression des opérateurs en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$
$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

Question relative au TP – Bonus de 2 points

Décrire et expliquer une expérience réalisée en TP permettant de mesurer la champ disruptif de l'air, c'est-à-dire le champ électrique qui provoque un arc électrique à travers de l'air ambiant à pression atmosphérique. (1 point)
Donner une valeur approchée de ce champ disruptif en précisant bien en quelle unité il est exprimé. (1 point)

Question sur les conducteurs 2 points



On étudie 3 **conducteurs** sphériques emboîtés. B_A est une boule pleine, B_B et B_C des boules creuses. B_A porte la charge Q (positive). B_B n'est pas chargée et B_C porte la charge Q. Déterminer la répartition des charges électriques au sein de ce système, c'est-à-dire leur localisation et leurs valeurs (on pourra répondre à l'aide d'un schéma).

Exercice 1 (Charges ponctuelles) 3 points

4 charges électriques ponctuelles immobiles sont réparties aux sommets d'un carré de centre O et de côté $2a$. Les charges situées sur les sommets A et B sont identiques et positives (valeur : $+q$). Les charges situées sur les sommets C et D sont identiques et opposées aux précédentes (valeur : $-q$). Ce système sera traité en coordonnées cartésiennes. Les coordonnées des points sont A(-a,+a,0) ; B(-a,-a,0) ; C(+a,-a,0) et D (+a,+a,0).

1°) Après avoir analysé les éventuels plans de symétrie et/ou d'antisymétrie, déduire l'orientation du champ électrique en un point M (0,y,0) situé sur l'axe Oy.

2°) Que devient l'orientation de ce champ au point O, centre du carré ?

3°) Calculer le champ électrique au point O. Préciser clairement son orientation et son module et donner une expression vectorielle.

Exercice 2 Boule sphérique creuse . Théorème de Gauss. **6 points**

Une boule creuse B de centre O, de rayon intérieur R et de rayon extérieur $(R + e)$ contient une distribution volumique non uniforme de charges électriques positives ρ telle que :

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 si\, R \leq r \leq R + e \\ \rho(r) = 0\, si\, r < R\, et\, r > R + e \end{cases}$$

r représente la distance par rapport au centre de la boule, $\rho_0\ est\ positif\ et\ e < R$

On note $\vec{E}$ le champ créé par cette distribution de charges et r la distance par rapport au centre de la boule.

1°) Calculer la charge totale Q portée par cette boule creuse et donner son expression en fonction de R, e et ρ_0 .

2°) Réaliser l'analyse des plans de symétrie du système. En déduire l'orientation du vecteur $\vec{E}$ et les variables dont il dépend, en un point quelconque de l'espace. Préciser le système de coordonnées utilisé.

3°) Montrer que le champ électrique au point O est nul pour des raisons de symétrie.

4°) On notera $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$, le champ électrique dans la région définie par $r < R$. Utiliser le théorème de Gauss afin d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$. Préciser bien la surface fermée utilisée et détailler le calcul du flux.

5°) On notera $\overrightarrow{E_{\text{B}}}$, le champ électrique dans la région définie par $R < r < (R + e)$. Utiliser le théorème de Gauss afin d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{E_{\text{B}}}$. Préciser bien la charge intérieure à la surface fermée utilisée.

6°) On notera $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$, le champ électrique dans la région définie par $r > (R + e)$. Utiliser le théorème de Gauss afin d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$.

7°) Le champ électrique présente-t-il des discontinuités ? Si oui à quels endroits de l'espace ? Préciser, le cas échéant, la valeur de ces discontinuités.

Exercice 3 Boule sphérique creuse . Méthode locale. **6 points**

On rappelle qu'en tout point de l'espace le champ électrique obéit à l'équation locale suivante : $div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

On considère dans cet exercice la boule B déjà décrite à l'exercice précédent et l'on utilisera directement les résultats issus de l'analyse des invariances et des plans de symétrie du système.

1°) On notera $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$, le champ électrique dans la région définie par $r < R$. Utiliser l'équation locale du champ afin d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$. La constante nécessaire pour la résolution de l'équation sera baptisée C_{int}.

2°) Utiliser le fait que le champ électrique est nul au point O afin de déterminer la valeur de C_{int} et donner l'expression finale de $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$. Comparer avec le résultat de l'exercice précédent.

3°) On notera $\overrightarrow{E_{\text{B}}}$, le champ électrique dans la région définie par $R < r < (R + e)$. Utiliser l'équation locale du champ afin d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{E_{\text{B}}}$. La constante nécessaire pour la résolution de l'équation sera baptisée C_B.

4°) Proposer et mettre en œuvre une méthode afin de déterminer C_B et donner l'expression finale de $\overrightarrow{E_{\text{B}}}$. Comparer avec le résultat de l'exercice précédent.

5°) On notera $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$, le champ électrique dans la région définie par $r > (R + e)$. Utiliser l'équation locale du champ afin d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$. La constante nécessaire pour la résolution de l'équation sera baptisée C_{ext}.

6°) Proposer et mettre en œuvre une méthode afin de déterminer C_{ext} et donner l'expression finale de $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$. Comparer avec le résultat de l'exercice précédent.

7°) Tracer schématiquement l'évolution du module du champ électrique en fonction de r. Justifier ce tracé par une analyse de fonction si nécessaire.

Exercice 4 (Calcul direct) 3 points

On considère un fil rectiligne de longueur $2l$ orienté suivant l'axe Ox. Ce fil porte une densité de charges par unité de longueur positive et uniforme égale à +λ sur le segment $]0, l]$ et une densité de charges par unité de longueur négative et uniforme égale à -λ sur le segment$[-l, 0[$.

1°) Après avoir analysé les éventuels plans de symétrie et/ou d'antisymétrie, déduire l'orientation du champ électrique en un point M (0,y,0) situé sur l'axe Oy.

2°) Démontrer et expliquer pourquoi le module du champ électrique généré par ce fil au point M (0,y,0) peut s'exprimer par une des intégrales suivantes :

1. $E = 2\int_0^l \frac{\lambda\, dx}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
2. $E = 2\int_0^l \frac{\lambda\, x\, dx}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
3. $E = 2\int_0^l \frac{\lambda\, dx}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)}$
4. $E = 2\int_0^l \frac{\lambda\, x\, dx}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)}$

3°) Calculer le module du champ électrique généré par ce fil au point M (0,y,0).